Onvergetelijk biljarten

Ruimtelijk geheugen is een belangrijk interdisciplinair onderwerp in levende systemen. Op wiskundig vlak is hier echter weinig onderzoek naar gedaan. Geïnspireerd op de simpele regels van wiskundig biljarten stellen we een nieuw model voor: zelfontwijkend biljarten.

Voor veel organismen is een ruimtelijk geheugen onmisbaar – zo ook voor onszelf. Het is niet eenvoudig om binnen een grote stad de snelste weg te vinden, rekening houdend met verkeersdrukte, eenrichtingsverkeer en dergelijke. In Londen zijn taxichauffeurs verplicht om de zogeheten *Knowledge* te leren, bestaande uit 320 standaardroutes binnen de stad. Hersenonderzoek heeft uitgewezen dat bij deze taxichauffeurs de hippocampus – een deel van de hersenen dat een belangrijke rol speelt in leren en geheugenvorming – significant groter is dan gemiddeld [1].

Ruimtelijk geheugen is niet iets wat exclusief bij mensen voorkomt. Ook bij dieren met een veel minder grote hersenmassa observeren we de aanwezigheid en het belang ervan. Mieren bijvoorbeeld hebben verschillende methoden van navigeren. Zo gebruiken ze feromonen om te markeren waar wel of geen eten is, herkennen ze grote structuren en onthouden ze zelfs het aantal stappen dat ze hebben gezet om hun totale pad te bepalen. Hoewel mieren niet de intelligentste dieren zijn, is hun ruimtelijk geheugen duidelijk ver ontwikkeld. Dit laat maar zien hoe belangrijk een ruimtelijk geheugen is.

Als we nog verder vereenvoudigen vinden we ook ruimtelijk geheugen in levenloze systemen. Recent onderzoek naar actieve druppels laat ook een vorm van ruimtelijk geheugen zien. Een voorbeeld van actieve druppels zijn kleine beetjes olie die zichzelf op een surfactant voortbewegen door middel van het Marangoni-effect. Wanneer de druppel olie bij zijn eigen spoor in de buurt komt, zal die daar echter van afgestoten worden. Dit afstotende effect kan begrepen worden door de besmette surfactant in het spoor van de druppel – de brandstof is daar simpelweg op [2]. Hoewel de druppel zelf natuurlijk geen intelligentie of geheugen bezit, heeft de huidige positie van de druppel wel invloed op de toekomstige baan.

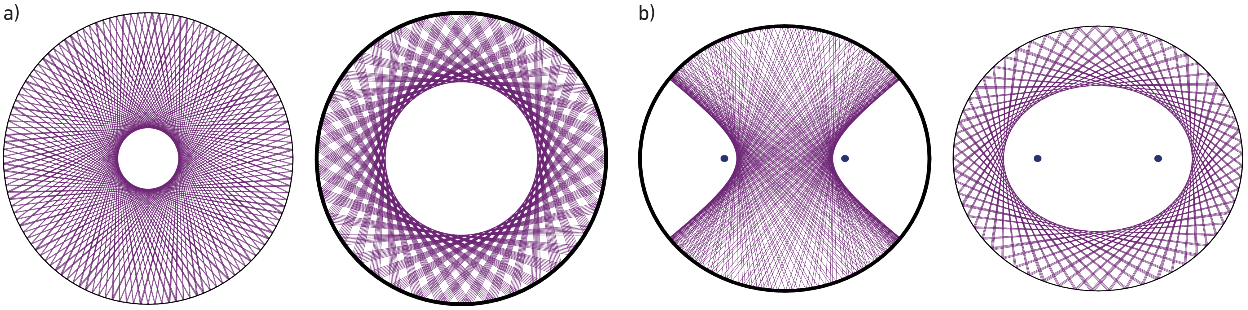
We zien dus in verschillende vormen van intelligentie een vorm van ruimtelijk geheugen. Maar kan ruimtelijk geheugen nog verder vereenvoudigd worden?

Als theoretici zijn we niet zozeer met specifieke voorbeelden bezig. We willen bouwen aan een fundamentele theorie voor ruimtelijk geheugen. Dit hebben we gedaan binnen het kader van wiskundig biljart. De regels van wiskundig biljarten zijn buitengewoon simpel. Een puntdeeltje (de bal) beweegt met een constante snelheid binnen een gesloten tweedimensionaal oppervlak (de tafel), en wanneer de bal de rand van de tafel raakt, vindt er een elastische terugkaatsing plaats. De theorie achter wiskundig biljarten is uitgebreid onderzocht sinds het begin van de twintigste eeuw en heeft brede toepassingen binnen de chaostheorie en statistische mechanica. De keuze van een tafel heeft een belangrijke invloed op de dynamica van het wiskundig biljarten. Het blijkt namelijk dat de paden van een biljartbal fundamenteel anders zijn op een vierkante tafel dan bijvoorbeeld op een cirkel.

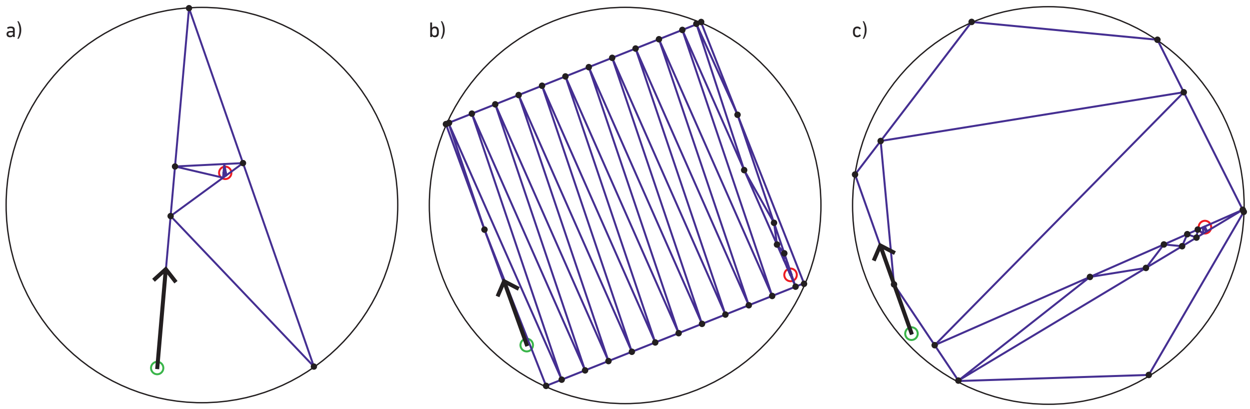
Het is bewezen dat op het vierkant – en elke andere polygonale tafel – een baan altijd ofwel periodiek is ofwel ergodisch. Met periodiek wordt bedoeld dat de biljartbal na eindige tijd weer in dezelfde toestand zal komen en zodanig dus nooit de hele tafel zal verkennen. Ergodisch, daarentegen, betekent dat de toestand van de biljartbal zich niet zal herhalen, en dat de biljartbal na een oneindig lange tijd willekeurig dicht bij elk punt op de tafel geweest zal zijn. Op circulaire of elliptische tafels zal een biljartbal nooit de hele tafel kunnen vullen. Elke biljartbaan binnen een cirkel zal bijvoorbeeld een kleinere cirkel onbezocht laten, zoals te zien is in figuur 1.

We hebben een nieuw model bedacht waarin het simpele wiskundig biljarten gecombineerd is met ruimtelijk geheugen: zelfontwijkend biljarten of SAB van het Engelse *self avoiding billiards* [3]. De regels zijn hetzelfde als bij klassiek wiskundig biljarten, met één belangrijk verschil: de biljartbal kan ook elastisch tegen zijn eigen afgelegde pad botsen zoals te zien in figuur 2.

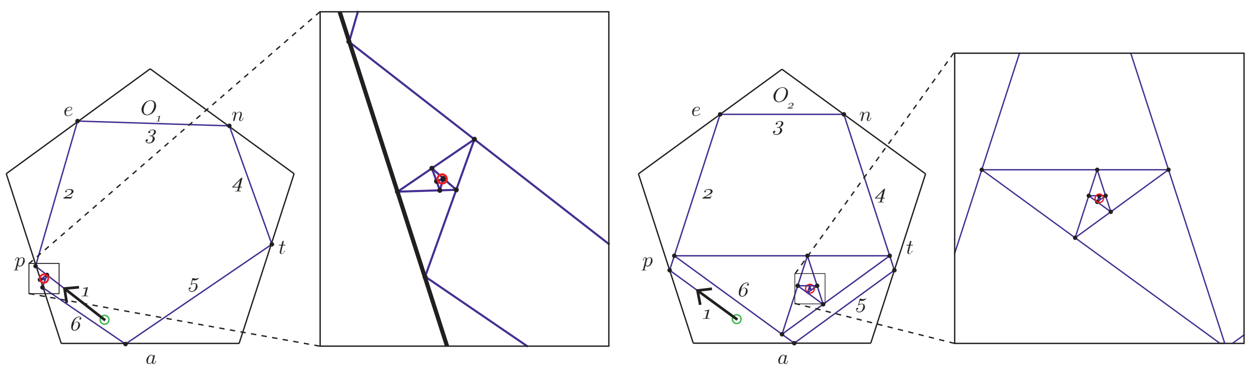
Een directe consequentie van deze regel is dat een biljartbal met elke botsing een stuk van de toegankelijke ruimte afsnijdt. Hierdoor creëert het deeltje een steeds kleinere tafel met elke botsing. Na oneindig veel botsingen benadert de overgebleven ruimte een punt. Dit is een ruimtelijke singulariteit die wij verwachten bij vrijwel iedere baan in SAB. Als we dit vergelijken met klassiek wiskundig biljart, dan is het verschil enorm. Zo is de levensduur van de biljartbal hierdoor eindig in SAB en kunnen we niet dezelfde definitie van chaos gebruiken.



Figuur 1. Voorbeelden van paden van een klassieke biljartbal binnen een cirkel (a) en een ellips (b) met aangegeven brandpunten.



Figuur 2. Drie voorbeelden van banen in zelfontwijkend biljart in 'petrischaaltjes'. De startpositie van het puntdeeltje (de bal) is aangegeven met groene omcirkeling en de eindpositie (de singulariteit) met rood. Botsingen zijn gemarkeerd met zwarte punten.

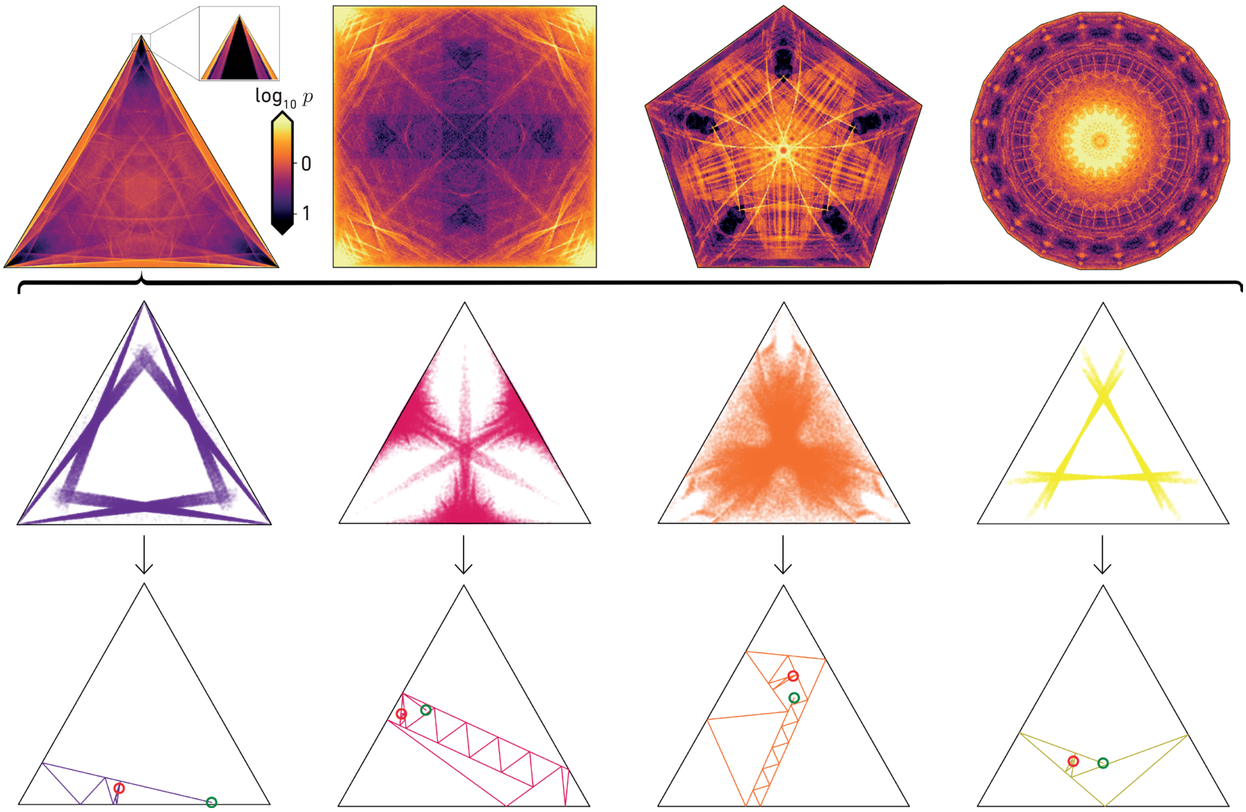


Figuur 3. Twee voorbeelden van banen in het pentagon met zijden p–e–n–t–a. Banen O_1 en O_2 hebben dezelfde beginpositie maar verschillen in initiële afschiethoek met $\delta\theta_0 = 0{,}01\,\pi$.

Ook is er nergens sprake van periodieke of ergodische banen. Wanneer de biljartbal op zijn eigen staart stuit hebben we namelijk ongedefinieerd gedrag, bovendien kan de bal per definitie nooit de hele tafel verkennen aangezien de beschikbare ruimte steeds kleiner wordt.
De gemodificeerde fysica binnen SAB laat echter toe een exotisch kruispunt van wetenschappelijke onderzoeksgebieden te verkennen. SAB is, naast een model voor geheugen in biologie en actieve materie, een volledig deterministisch en simpel systeem. Net als het originele wiskundig biljart, is SAB deterministisch chaotisch. Bovendien is het een simpel voorbeeld van Newtoniaanse mechanica met een geheugenfunctie. Naast simpel is SAB, zoals eerder gezegd, ook van nature eindig. Dit maakt SAB tijd-asymmetrisch – een eigenschap die weinig voorkomt in proposities voor fysica zonder expliciete aanpassingen die tijd asymmetrisch maken.
Voorbeelden van banen geproduceerd door SAB zijn te vinden in figuur 2. Een belangrijke observatie is dat deeltjes het verschil niet zien tussen hun staart en een vast initieel object zoals een ribbe van de tafel. Scherpe hoeken hebben het effect deeltjes snel op te sluiten in die hoek zoals te zien in figuur 2a. Andere banen laten juist zien dat het deeltje lang vrij kan bewegen door middel van een zigzag zoals te zien in figuur 2b, of door de rand van de tafel te verkennen zoals in figuur 2c. Een belangrijk vraagstuk komt nu naar boven: als banen zo ontzettend verschillend kunnen zijn, hoe kunnen we ze dan ooit gezamenlijk bestuderen?
Een van de simpelste talen die is ontwikkeld om banen te classificeren heet CAR (*collision array representation*). In CAR houden we bij met welk object een deeltje botst. De conventie voor de naamgeving van objecten varieert, maar voor het pentagon in figuur 3 is gekozen om (tafel)ribben te identificeren met letters en segmenten van de baan met oplopende getallen. Zo kunnen de banen O_1 en O_2 beschreven worden met:

$$CAR(O_1) = \{p, e, n, t, a, p, 1, p, \ldots\}$$
$$CAR(O_2) = \{p, e, n, t, a, 2, 4, 6, \ldots\}$$

Het op een dusdanige manier representeren van banen laat toe klassen te herkennen binnen SAB. De links afgelezen overlap tussen $CAR(O_1)$ en $CAR(O_2)$ is in dit geval vijf elementen voordat een verschillend element voorkomt. De correlatie tussen O_1 en O_2 is daarmee 5. Het is precies deze simpele maatstaf die nodig zal blijken



Figuur 4. Rij 1: warmteplots voor singulariteiten van twintig miljoen willekeurige banen in de regelmatige N-hoek (N = 3, 4, 5, 20). Rij 2: singulariteiten van de geïdentificeerde symmetrische CAR-klassen in de driehoek met een correlatie (links afgelezen overlap) van 15. Rij 3: een voorbeeldbaan uit de klassen erboven.

de complexe emergentie binnen SAB te kunnen begrijpen.
Een van deze complex-emergente eigenschappen van SAB vindt plaats in zijn statistieken. Grote hoeveelheden onafhankelijke banen kunnen lastig efficiënt worden afgebeeld door ze in de volledigheid over elkaar heen te plotten.
Wat wel interessant is om af te beelden, zijn de singulariteiten. Elk deeltje in SAB neigt namelijk naar een enkele singulariteit ruim binnen simulatiegrenzen en daarmee zijn singulariteiten een fantastische maatstaf voor de complexiteit van SAB. We zien een warmteplot van singulariteiten bij uniform willekeurig losgelaten deeltjes in figuur 4.
De singulariteitverdelingen lijken op het oog te bestaan uit discrete regio's met hoge dichtheden aan deeltjes. Hierdoor ontstaat het vermoeden dat deze regio's bestaan uit soorten banen die statistisch gezien vaak voorkomen. Maar wat betekent het voor banen om op elkaar te lijken? Hiervoor gebruiken we CAR. Banen vergelijken op basis van CAR is een welgedefinieerde equivalentierelatie waarmee banen dus succesvol geclassificeerd kunnen worden. In figuur 4 zijn vier willekeurige klassen te zien waar de banen een correlatie van 15 hebben en onder elke voorbeeldklasse staat eveneens een voorbeeldbaan. Met CAR kunnen we dus de complexe substructuren van de singulariteitverdeling als het ware opsplitsen in bouwstenen.
Nog steeds is veel onbekend over SAB. Toch zien we dat een groot deel van de gevonden hopeloze complexiteit teruggebracht kan worden tot elegante representaties. De eenvoud en wetenschappelijke positie van SAB bieden een kans om universele kennis te ontrafelen over processen met vormen van geheugen. De hoop is dat verdere studie van simpele variaties op SAB blootlegt wat de sterkste hulpmiddelen zijn voor het begrijpen van processen met geheugen. Deze universele kennis kan bijvoorbeeld toegepast worden in het verbeteren van complexe algoritmes of kunstmatige intelligentie, net zoals mieren hun omgeving efficiënter kunnen verkennen met een slim beetje extra geheugen.

REFERENTIES

1 D. Maguire et al., *Navigation-related structural change in the hippocampi of taxi drivers*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **97-8**, 4398 - 4403 (2000).
2 C. Hokmabad et al., *Chemotactic self-caging in active emulsions*, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **119-24**, e2122269119 (2022).
3 T. Albers et al., *Billiards with Spatial Memory*, *Physical Review Letters* **132**, 157101 (2024).